

УДК 532

<https://doi.org/10.36906/AP-2022/23>

Маликов З.М., Наврузов Д.П.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз
г. Ташкент, Узбекистан*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ НА ОСНОВЕ НОВЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Аннотация. В работе проводится верификация новой двухжидкостной модели турбулентности на примере осесимметричной несжимаемой струи. Данная модель ранее была апробирована для этой задачи, где была использована система уравнений с постоянным давлением. В настоящей работе рассмотрена полная система уравнений турбулентности новой модели. Для сравнения в работе представлены также численные результаты хорошо известной модели Спаларта – Аллмареса SA. Численные реализации уравнений гидродинамики проведены на основе использования метода контрольного объёма FVM (Finite Volumes Method). Для аппроксимации конвективных членов использована схема Леонардо QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics), а для вязкостных членов – центральная конечно-разностная схема. Коррекция к скоростям проводилась по методике SIMPLEC. Полученные численные результаты сопоставлены с опытными данными из базы данных NASA. Показано, что новая двухжидкостная схема более точно описывает турбулентную струю, чем модель SA.

Ключевые слова: двухжидкостная модель турбулентности; модель SA; конечно-разностная схема против потока; схема QUICK; метод контрольного объёма; SIMPLEC.

Malikov Z.M., Navruzov D.P.

*Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures
named after M.T. Urazbayev, AS RUz
Tashkent, Uzbekistan*

NUMERICAL STUDY OF AN AXISYMMETRIC JET BASED ON A NEW TWO FLUID TURBULENCE MODEL

Abstract. A new two-fluid model of turbulence is verified by the example of an axisymmetric incompressible jet. This model was previously tested for the problem, where a system of equations with constant pressure was used. In the article, a complete system of turbulence equations of the new model is considered. For comparison, the article also presents the numerical results of the well-known Spalart – Allmarès (SA) model. Numerical realizations of the equations of hydrodynamics were performed using the Finite Volumes Method (FVM). The Leonardo QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) scheme was used to approximate the convective terms, and

the central finite-difference scheme was used for the viscosity terms. Velocity correction was conducted according to the SIMPLEC method. The numerical results obtained are compared with experimental data from the NASA database. It is shown that the new two-fluid scheme more accurately describes the turbulent jet than the SA model.

Keywords: two-fluid turbulence model; SA model; upstream finite-difference scheme; QUICK scheme; control volume method; SIMPLEC.

Во многих случаях при движении жидкости и газа возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва. Течение жидкости в окрестности такой поверхности называется струёй. Тангенциальный разрыв могут терпеть такие параметры, как скорость течения, температура и концентрация примеси. При этом распределение статического давления оказывается непрерывным. Как известно, на поверхности тангенциального разрыва в связи с её неустойчивостью возникают вихри, беспорядочно движущиеся вдоль и поперёк потока, вследствие этого происходит молярный поперечный перенос количества движения, тепла и примесей. В результате на границе двух струй формируется область конечной толщины с непрерывным распределением скорости, температуры и концентрации примеси, которая называется струйным турбулентным пограничным слоем. Наиболее изученным видом турбулентной струи является струя, распространяющаяся в покоящейся среде, такая струя называется затопленной. При равномерном поле скорости в начальном сечении затопленной струи границы её пограничного слоя представляют собой расходящиеся поверхности, которые пересекаются у кромки сопла. С внешней стороны пограничный слой струи соприкасается с неподвижной жидкостью, причём под внешней границей понимают поверхность, во всех точках которой составляющая скорости по оси x равна нулю ($U=0$). С внутренней стороны пограничный слой переходит в ядро постоянной скорости, поэтому на внутренней границе пограничного слоя скорость потока равна скорости истечения $U=U_0$ [1].

Рассматриваемая задача имеет большое значение для авиационной и ракетно-космической техники. Моделирование турбулентной затопленной струи вот уже на протяжении почти 100 лет привлекает внимание многих исследователей. Несмотря на множества этих исследований, рассматриваемую задачу нельзя считать полностью завершённой, т. к. она связана до сих пор не решённой проблемой турбулентности. Несмотря на то, что до сегодняшнего дня разработано более 100 различных моделей турбулентности, универсальную модель турбулентности все ещё не существует. Это означает, что эти модели, если удовлетворительно описывают одних классов турбулентности, других могут описывать неверно даже качественно. Однако недавно опубликована работа одного из соавторов настоящей статьи [2], где представлен новый подход к решению проблемы турбулентности. В указанной работе на основе нового подхода получена замкнутая математическая модель турбулентности, которая апробирована для различных задач. Достоинством новой модели являются её способность описывать анизотропную турбулентность, а также в работе показано, что она не страдает «аномалией круглой струи». Суть данного явления заключается в том, что все модели, направленные на замыкание уравнений Навье-Стокса осреднённые по Рейнольдсу

(модели RANS) для осесимметричной струи дают в полтора раза большее расширение струи, чем наблюдается в экспериментах. Поэтому в этих моделях вводятся специальные поправки. Кроме того, сравнения численных результатов модели с известными опытными данными показали её хорошую точность. Новая математическая модель была апробирована для ряда задач турбулентности и результаты были сопоставлены с экспериментальными данными, которые представлены в базе данных NASA (<https://clck.ru/dncvY>). В работе [2] на основе новой двухжидкостной модели проведено исследование затопленной струи. При этом использована упрощённая, параболизированная система уравнений, т.е. предполагалось давление постоянным. Однако не во всех струйных течениях давление можно считать постоянным. Например, во многих технических устройствах струя может протекать в ограниченных пространствах. Поэтому целью настоящей работы является апробация новой модели для затопленной струи при использовании полной системы уравнений турбулентности. В работе для сопоставления приведены также результаты хорошо известной модели SA [3].

Модель турбулентности SA является однопараметрической и на сегодняшний день является одной из наиболее популярных моделей. Поэтому эта модель достаточно хорошо освещена во многих научных работах и учебниках. Следовательно, нет необходимости останавливаться на самой модели SA. Однако отметим, что методики численной реализации модели SA и двухжидкостной модели аналогичны. Что касается новой двухжидкостной модели, то она подробно изложена в работе [2]. Краткое содержание сути новой двухжидкостной модели также представлено в работе [4]. В этих работах показана возможность представления турбулентного потока как гетерогенную смесь двух жидкостей, совершающие относительное движение. Система уравнений несжимаемой турбулентной струи в новой двухжидкостной модели в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial p}{\rho \partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{r \partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G} u}{r \partial r} - \frac{\partial u u}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial p}{\rho \partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r \partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial r \mathcal{G} \mathcal{G}}{r \partial r} - \frac{\partial u \mathcal{G}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial x} u - \frac{\partial U}{\partial r} \mathcal{G} + C_s \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \mathcal{G} + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(\nu_{xr} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right) \right) - K_f u, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} = - \frac{\partial V}{\partial r} \mathcal{G} - \frac{\partial V}{\partial x} u - C_s \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) u + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_{xr} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(2\nu_{rr} r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - 2\nu_{rr} r \frac{\mathcal{G}}{r^2} - K_f \mathcal{G}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial r V}{r \partial r} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь

$$v_{xx} = v_{rr} = 3\nu + 2 \frac{S}{\text{def}(\vec{V})}, \quad v_{xr} = 3\nu + 2 \left| \frac{u\mathcal{G}}{\text{def}(\vec{V})} \right|, \quad \text{def}(\vec{V}) = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2},$$

$$S = \frac{u^2 J_x + \mathcal{G}^2 J_r}{J_x + J_r}, \quad J_x = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad J_r = \left| \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right|, \quad C_s = 0.2, \quad K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|d \cdot \mathcal{G}|}{d^2}.$$

В приведённых уравнениях U, V – соответственно аксиальная и радиальная составляющие вектора осреднённой скорости потока, u, \mathcal{G} – соответственно аксиальная и радиальная относительные скорости, v_{xx}, v_{rr}, v_{xr} – эффективные молярные вязкости, K_f – коэффициент трения, d – ближайшее расстояние до твёрдой стенки.

Для определения коэффициента трения составим определитель для характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial U}{\partial r} + C_s \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial V}{\partial x} - C_s \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) & -\lambda - \frac{\partial V}{\partial r} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) находим наибольший вещественный корень

$$\lambda_{\max} = \sqrt{D} \quad \text{если } D > 0$$

$$\lambda_{\max} = 0 \quad \text{если } D < 0 \quad (3)$$

$$D = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial r} + C_s (1 - C_s) \left[\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x} \right]^2$$

Для численной реализации система уравнений (1) приводилась к безразмерному виду соотношением всех скоростей к средне-расходной скорости струи на выходе из сопла U_0 , а линейные размеры к радиусу сопла R . Исследование проводилось для струи с числом Рейнольдса $Re = \rho R U_0 / \mu = 5600$. Для получения стационарного решения систем уравнений (1) использовался метод установления. Суть данного метода в том, что решается нестационарная задача и при большом значении безразмерного времени достигается стационарное решение задачи. При интегрировании уравнений использовалась прямоугольная сетка 200×100 , безразмерные шаги интегрирования были равны $\Delta t = 0.005$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta r = 0.1$. В качестве начального условия рассмотрена идеальная струя без расширения. Стационарное решение достигалось при $t = 100$.

Для численной реализации систем уравнений гидродинамики использован метод контрольного объёма. Для конвективных членов использована схема Леонардо QUICK [5] в явном виде, а вязкостные члены аппроксимировались центральной разностью. Причём вязкостные члены в продольном направлении аппроксимировались в явном виде, а в поперечном направлении в неявном виде. Схема Леонардо QUICK имеет второго порядка точности. Следовательно, расчётная схема имела точность первого порядка по времени и второго по пространству. Для реализации полу-неявной схемы использовался метод прогонки. Связь между давлением и скоростями проводилась процедурой SIMPLEC [6], где была использована итерационный метод верхней релаксации [7].

Многочисленные исследования показали, что характеристика струи сильно зависит от потока, который формируется в дозвуковом сопле. Известно, что в дозвуковом сопле происходит подавление турбулентности и на выходе из сопла можно получить достаточно равномерный поток. Поэтому в работе в качестве начальных условий приняты следующие безразмерные параметры:

$$U = 1, \quad V = 0, \quad u = 0.055, \quad g = 0.028r^{1/2}.$$

Выше сказано, что для конвективных членов использована схема Леонардо QUICK. Представим эту схему для одномерного случая

$$\frac{\partial U\Phi}{\partial x} = \frac{U_e\Phi_e - U_w\Phi_w}{\Delta x} \quad (4)$$

$$U_e = \frac{(U_i + U_{i+1})}{2}, \quad U_w = \frac{(U_i + U_{i-1})}{2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_e = \frac{3}{16}(\Phi_i + \Phi_{i+1}) + \frac{3}{8}(\Phi_i + \Phi_{i-1}) - \frac{1}{16}(\Phi_{i-2} + \Phi_{i-1}), \quad U_e > 0, \\ \Phi_e = \frac{3}{16}(\Phi_i + \Phi_{i-1}) + \frac{3}{8}(\Phi_i + \Phi_{i+1}) - \frac{1}{16}(\Phi_{i+1} + \Phi_{i+2}), \quad U_e < 0, \\ \Phi_w = \frac{3}{16}(\Phi_i + \Phi_{i-1}) + \frac{3}{8}(\Phi_{i-2} + \Phi_{i-1}) - \frac{1}{16}(\Phi_{i-3} + \Phi_{i-2}), \quad U_w > 0, \\ \Phi_w = \frac{3}{16}(\Phi_{i-2} + \Phi_{i-1}) + \frac{3}{8}(\Phi_i + \Phi_{i-1}) - \frac{1}{16}(\Phi_i + \Phi_{i+1}), \quad U_w < 0, \end{array} \right.$$

Приведём численные результаты полученные на основе новой двухжидкостной модели и модели Спаларта-Аллмареса.

На рисунке 1 приведены численные результаты для безразмерной осевой продольной скорости в зависимости от расстояния до сопла.

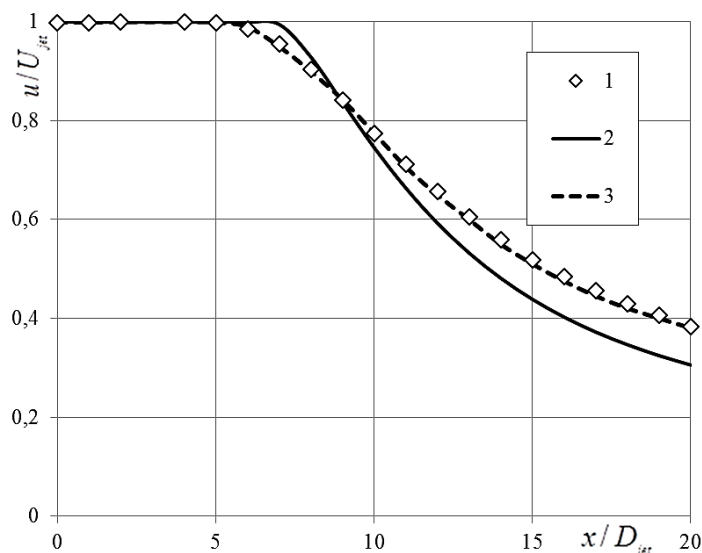


Рис. 1. Безразмерная осевая продольная скорость в зависимости от расстояния до сопла.

1 – эксперимент, 2 – модель SA, 3 – новая двухжидкостная модель

На рисунке 2 представлены профили турбулентного напряжения в различных сечениях струи.

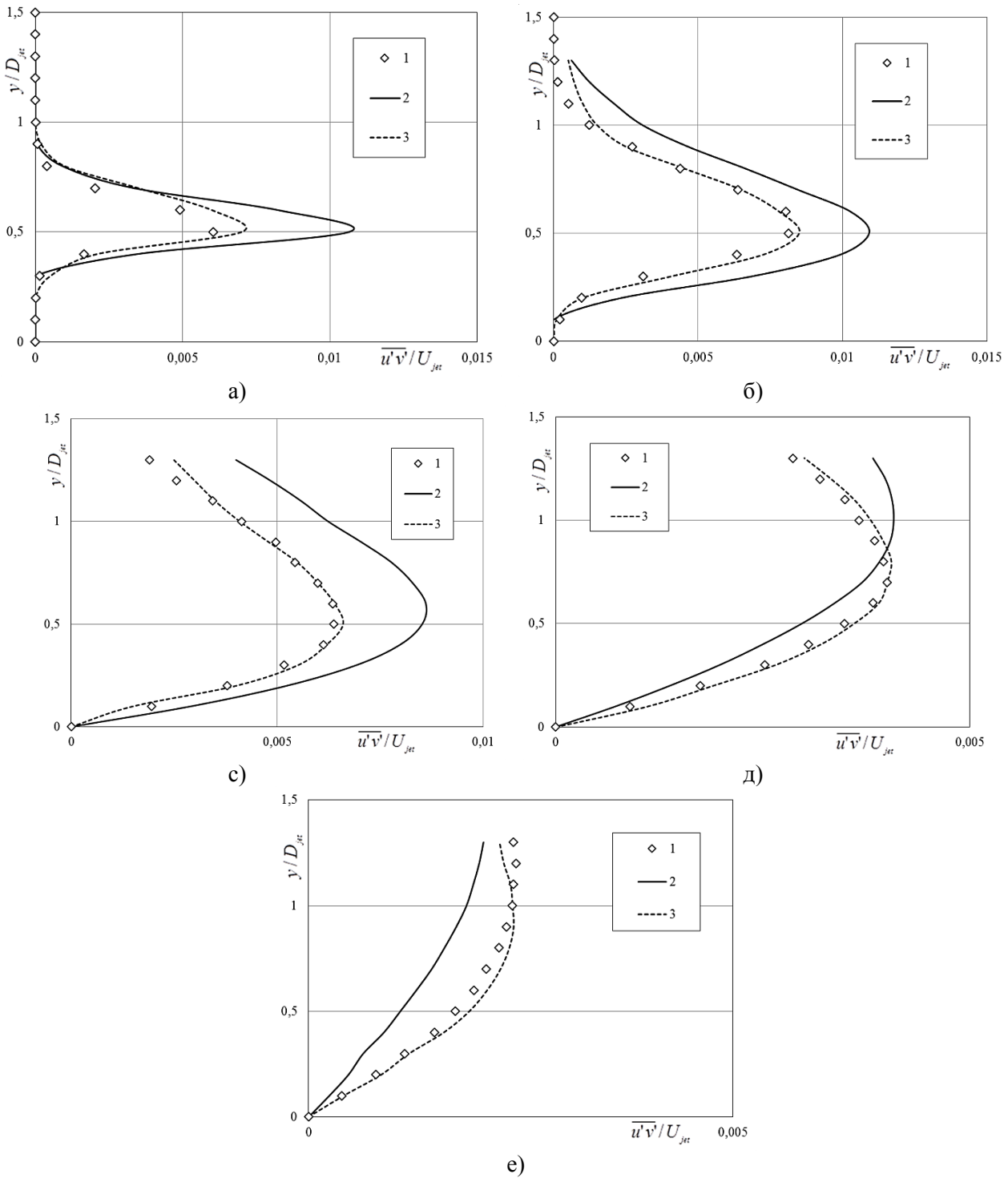


Рис. 2. Профиль турбулентного напряжения.
1 – экспериментальные данные, 2 – модель SA, 3 – двухжидкостная модель.
а) $x/D_{jet}=2$, б) $x/D_{jet}=5$, в) $x/D_{jet}=10$, д) $x/D_{jet}=15$, е) $x/D_{jet}=20$

Необходимо отметить, что в новой двухжидкостной модели турбулентное напряжение $\overline{u'v'}$ и среднеквадратичное значение флуктуирующей продольной скорости $\sqrt{\overline{u'^2}} = u$.

Представленные на рисунках 1-2 показывают, что новая двухжидкостная модель более точно описывает турбулентную осесимметричную струю, чем модель SA. Кроме того, новая двухжидкостная модель более устойчива, чем модель SA. Численные эксперименты показали, что модель SA теряла устойчивость при шаге времени $\Delta t > 0.001$ в то время как

двухжидкостная модель была устойчива даже при $\Delta t > 0.01$. Поэтому новую двухжидкостную модель можно считать практичной для расчётов инженерных задач и имеющей высокую точность.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. М: Наука. 1984. 716 с.
2. Malikov Z.M. Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // Applied Mathematic Modeling. 2020. Vol. 82. Pp. 409-436. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
3. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // 30th aerospace sciences meeting and exhibit. 1992. Pp. 439-478. <https://doi.org/10.2514/6.1992-439>
4. Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // Fluid Dynamics. 2020. Vol. 55. No. 8. Pp. 1012-1028. <https://doi.org/10.1134/S0015462820080066>
5. Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1979. Vol. 19. Issue 1. Pp 59-98.
6. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
7. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.

© Маликов З.М., Наврузов Д.П., 2022