УДК 372.851
http://doi.org/10.36906/KSP-2020/34

Соловьев М.Е., Горлова С.Н.
Нижневартовский государственный университет
г. Нижневартовск, Россия

МЕТОДИКА РАБОТЫ НАД НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕЙ С ПРОТИВОРЕЧИВЫМИ ДАННЫМИ

Аннотация. Особое значение в математике имеют некорректные задачи, способствующие формированию критичности и гибкости мышления. В методике математики подобные задачи представлены эпизодически; в большинстве случаев присутствует традиционная формулировка задач с единственным решением. В настоящей работе предлагается вариант работы с некорректными геометрическими задачами с противоречивыми данными в условии.

Ключевые слова: некорректная задача, корректно поставленная задача, некорректная задача с противоречивыми данными

В современной школьной системе образования традиционно рассматриваются задачи, условие и требование которых четко и однозначно сформулировано. Однако, по нашему мнению, особый интерес и неоценимую методическую значимость в формировании представлений о геометрических конструкциях представляет класс задач, называемых некорректными [2]. Отметим, что в математике под некорректной задачей понимают такую задачу, решение которой не существует или не определено однозначно.

Главной задачей при работе с некорректной задачей является то, что на ее основе учителю необходимо перейти к корректно поставленной задаче [1].

Существует несколько видов некорректных задач. В настоящей работе представим задачи, условие или решение которых содержат противоречивые данные. Методический потенциал таких задач заключается в формировании у учащихся умений определять зависимости между величинами с целью нахождения взаимоисключающих друг друга данных.

Приведем примеры таких задач, а также опишем методику работы над ними.

Задача 1. В окружности проведена хорда CD, не проходящая через центр. Найдите периметр треугольника COD, если CD = 10 см, а диаметр окружности равен 8 см.

Для того чтобы ее решить, учителю необходимо привести задачу к корректной формулировке. Это можно сделать двумя способами: либо устранить из условия задачи одно из двух взаимоисключающих друг друга данных, либо изменить значения противоречивых данных. Отметим, что первый способ в данной задаче не является рациональным, поскольку тогда в условии будет присутствовать нехватка данных.

Продемонстрируем решение задачи (рис. 1).

Решение:
1. Проведем радиусы окружности CO и OD;
2. Т.к. CO и OD – радиусы одной окружности, то $CO = OD = \frac{AB}{2} = 4$ см;
3. $P_{COD} = CO + OD + CD = 18$ см.

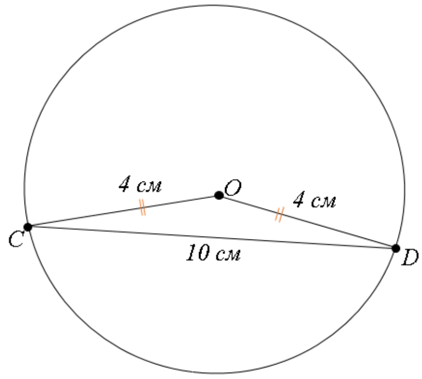

Рис.1. Решение и иллюстрация к задаче 1

Обучающиеся ответ получат, но задумаются ли они о том, что в данной задаче кроется противоречие? Возможно, нет. Для того, чтобы натолкнуть их на выявление противоречия, учитель, свою очередь, может задать следующий вопрос: «Определите, выполняется ли неравенство сторон для треугольника COD?». Класс придет к выводу, что теорема не выполняется. Учитель может акцентировать на этом внимание: «А почему не выполняется? В чем причина?». Следовательно, своими вопросами он постепенно направляет класс на выявление противоречия в задаче.

Другой случай, когда обучающиеся знают, что диаметр – хорда наибольшей длины (допустим, учитель привел их к данному факту после того, как они изучили основные элементы окружности). Тогда он может сразу предложить обучающимся привести задачу к корректной формулировке.

Заметим, что если мы поменяем значения хорды и диаметра местами, то ответ не изменится. Однако, рассматриваемый объект в задаче будет существовать. Это послужит главным аргументом для обучающихся, если они заметят, что разницы между исходной и скорректированной задачей в плане полученного ответа или решения нет.

Противоречивость в задаче может быть выявлена не только при анализе условия, но и также в ходе решения. Приведем пример.

Задача 2: В треугольнике ABC ($AB = BC$) провели высоту BH. Оказалось, что P_{ABC} на 11 см. больше P_{ABH} . Известно, что $AB = 10$, а $AC = 12$. Найдите высоту BH.

Перед тем, как привести данную задачу к корректной, нужно проанализировать ее условие на наличие противоречивых данных.

В данном случае, на этапе анализа условия задачи противоречие отыскать трудно, да и невозможно. Значит, оно кроется либо в решении, либо в ответе, который мы получим.

Продемонстрируем решение задачи (рис.2).

Решение:
1. Т.к. ABC – равнобедр, то BH – медиана ⇒ AH = HC = 6;
2. P_{ABC} = AB + BC + AC;
P_{ABC} = 2 AB + AC;
3. P_{ABH} = AB + BH + AH;
4. P_{ABC} = P_{ABH} + 11
2 AB + AC = AB + BH + HC + 11
BH = AB + AC – HC – 11
BH = 10 + 12 – 6 – 11
BH = 5

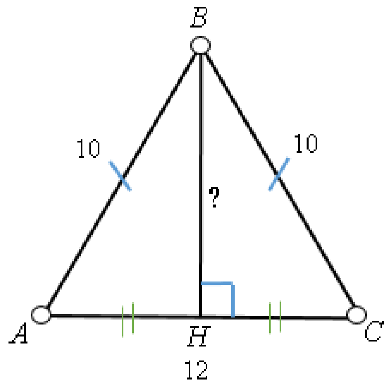

Рис.2. Решение и иллюстрация к задаче 2

Ответ получен, однако внимательный ученик заметит, что прямоугольного треугольника *ABH* (или *CBH*) не существует, поскольку его стороны не удовлетворяют теореме Пифагора ($10^2 \neq 5^2 + 6^2$).

Конечно же учитель должен акцентировать внимание класса на этом моменте, задавая вопросы: «существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 5,6 и 10?», «какая теорема может опровергнуть существование прямоугольного треугольника *ABH*?» и т.д.

Также будет полезным поставить перед классом вопрос: «Почему появилось противоречие?». Другими словами, что могло послужить возникновению данного противоречия. Здесь потребуется от учеников подробный анализ всех известных данных, входящих в условие задачи, а также полученных в ходе решения. Учитель может предложить классу ответить на следующий вопрос: «Каким должна быть длина *BH*, чтобы треугольник *ABH* существовал?». Применяя теорему Пифагора, обучающиеся скажут, что длина *BH* должна быть равна 6 см. Тогда учитель может попросить класс посчитать периметр треугольника *ABH*, зная, что длина высоты равна 6 см. Отсюда они придут к тому, что периметр треугольника *ABH* равна 24 см. Поставив перед обучающимися задачу сравнить периметры треугольников *ABC* и *ABH*, учитель направит их мысли на то, что разница между периметрами треугольников должна быть не 11, а 8 см. Следовательно, для того чтобы избавиться от противоречия и привести задачу к корректному виду, нужно уменьшить разницу между периметрами треугольников на 3 см.

Следует уточнить, что обучающиеся решают эту задачу без применения теоремы Пифагора. Сама теорема нужна только для того, чтобы класс смог увидеть противоречие между полученным ответом и данными условия задачи.

Разберем еще одну похожую задачу.

Задача 3: В прямоугольном треугольнике *ABC* (∠ *C* – прямой) *AB* = 10 см, а *AC* = 6 см. Из середины катета *BC* опустили перпендикуляр на гипотенузу *AB*, пересекающий ее в точке *H*. Найдите *BH*, если длина перпендикуляра равна 2 см.

Продемонстрируем решение задачи (рис.3).

Решение:

1. Из прямоугольного треугольника ABC:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

$BC^2 = 100 - 36$

$BC^2 = 64$

$BC = 8$

2. M – середина $BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 4$

3. Из прямоугольного треугольника BHM:

$BM^2 = MH^2 + HB^2$

$HB^2 = BM^2 - MH^2$

$HB^2 = 16 - 4$

$HB^2 = 12$

$HB^2 = 2\sqrt{3}$

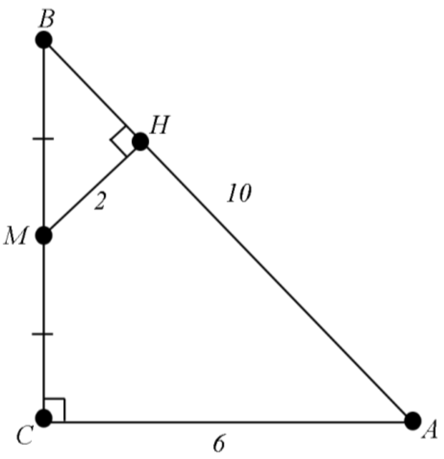

Рис.3. Решение и иллюстрация к задаче 3

Казалось бы, что задача решена верна, однако следует обратить внимание на соотношение сторон двух прямоугольных треугольников ABC и MBH. Они являются подобными по острому углу ($\angle B$ – общий). Следовательно, можно составить равенство пропорциональных сторон $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MH} = \frac{BC}{BH}$. Если мы подставим найденные значения в данное равенство, то заметим, что оно не выполняется $\frac{10}{4} \neq \frac{6}{2} \neq \frac{8}{2\sqrt{3}}$, а значит в задаче присутствует противоречие.

Чтобы избавиться от противоречия необходимо понять, что часть равенства $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BH}$ выполняется, если BH = 3,2 см. Отсюда следует, что длина перпендикуляра MH должна составлять 2,4 см.

Получается, чтобы привести задачу к корректной формулировке (избавиться от противоречия в решении задачи), нужно взять длину перпендикуляра равной 2,4 см.

Существенное значение при решении некорректных задач имеет построение чертежа. В некоторых случаях пространственные представления способствуют определению противоречивых данных еще на этапе анализа условия задачи. Некорректные задачи, условие или решение которых содержит противоречивые данные, являются хорошим средством для выявления соотношений между величинами. При работе с ними обучающийся всегда должен задаваться вопросом, а могут ли данные величины быть противоречивыми в единстве. Некорректные задачи с противоречивыми данными позволяют сформировать у обучающегося умение видеть и понимать соотношения между известными и найденными величинами, доказывать или опровергать их.

Литература

1. Боженкова Л.И. О корректности школьных геометрических задач // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции (г. Красноярск, 10–11 ноября 2016 г.) / отв. ред. М.Б. Шашкина. Красноярск: изд-во Красноярского гос. пед. университета, 2016. С. 33–40.

2. Горлова С.Н., Соловьев М.Е. Использование некорректно сформулированных математических задач в обучении математике // Культура, наука, образование: проблемы и перспективы: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (г. Нижневартовск, 12 ноября 2019 года) / отв. ред. Д.А. Погонышев. Нижневартовск: Нижневартовский государственный университет, 2019. С. 332-335.